الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الوادي
ثانوية بوشوشة – المختلطة –

المستوى : السنة الثالثة
علوم تجريبية
السنة الدراسية 2021 / 2022

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة: : الرياضيات — المدة :3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

## الموضوع الأول :

### التمرين الأول: (04 نقاط)

**من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدده مع التعليل:**

1) الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x+1}$ هي دالة:

أ) فردية ب) زوجية ج) ليست زوجية وليست فردية

2) حل المعادلة التفاضلية: $y' - \ln 3y - \ln 27 = 0$ والذي يحقق $y(0) = 6$ هو

أ) $y(x) = e^x - \ln 3$ ب) $y(x) = 3^{x+2} - 3$ ج) $y(x) = 9e^x - 3$

3) $A$ و $B$ حدثان مستقلان و $P(A) = 0.2$ و $P(A \cup B) = 0.35$ ، احتمال الحدث $B$ هو :

أ) $P(B) = 0.15$ ب) $P(B) = 0.1875$ ج) $P(B) = 0.125$

4) $(U_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1 + \ln x)dx$

نضع: $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{36}$ قيمة $S$ هي.

أ) $S = 2022$ ب) $S = 1444$ ج) $S = 1443$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

$I$. $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) أدرس تغيّرات الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) - x = 0$.

3) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $[1; \sqrt{3}]$ فإنّ: $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$.

$II$. $(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $1 \leqslant U_n \leqslant \sqrt{3}$

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(U_n)$ ، ثمّ استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$: $V_n = \dfrac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية $(V_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) أكتب $V_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج $U_n$ بدلالة $n$ وأحسب نهاية $(U_n)$ مجددا.

3) أحسب بدلالة $n$ المجموعين $S_n$ و $S'_n$ : $S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \cdots + \frac{1}{V_n}$ و $S'_n = \frac{1}{(U_0)^2} + \frac{1}{(U_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(U_n)^2}$

## التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كريات لا نفرق بينها باللّمس ، كريتان تحملان الرقم: 0 و أربع كريات تحمل الرقم :2 وكرية تحمل الرقم: 1 وكرية تحمل الرقم: 4.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق.

نعتبر الحدثين:

$A$ : "الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6".

$B$: "الكريات المسحوبة جداء أرقامها يساوي 8"

1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحدثين $A$ و $B$ على الترتيب.

2) أحسب $P(A \cap B)$ ، هل الحدثين $A$ و $B$ مستقلان؟. برّر إجابتك.

3) استنتج $P_A(B)$ ، ثمّ $P(\overline{A \cap B})$.

4) ليكن المتغيّر العشوائي $X$ الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.

أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P\left(\frac{X^2-16}{X} > 0\right)$.

## التمرين الرابع: (08 نقاط)

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{(1+\ln x)^2}{x}$.

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ وبيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، ثمّ فسر النتائج المتحصل عليها بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) أكتب معادلة المستقيم $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

3) $g$ الدالة العددية المعرّفة على $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x + \ln x$.

أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ب) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]1; +\infty[$: $1 + x + \ln x > 0$.

جـ) إستنتج وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(T)$.

4) أنشئ المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(T)$.

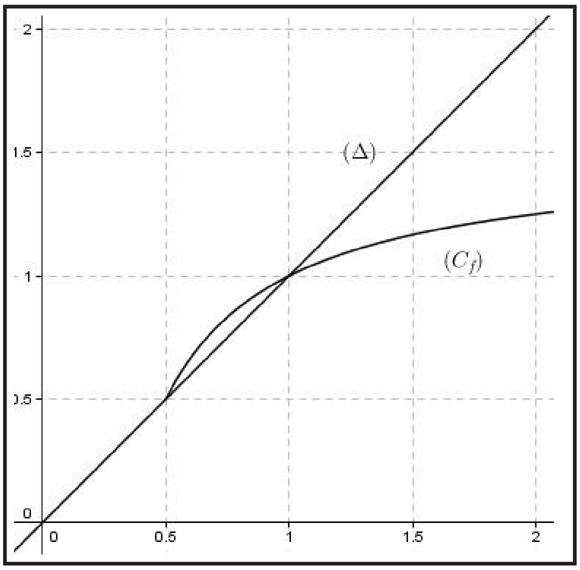
5) $m$ وسيط حقيقي موجب ، ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة: $\ln x = \sqrt{mx} - 1$.

6) أحسب مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$.

**إنتهى الموضوع الأوّل**

## الموضوع الثاني :

### التمرين الأول: (04 نقاط)




$f$ الدالة المعرّفة على المجال $I = [\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ و $(\Delta)$ مستقيم ذو المعادلة $y = x$. **(كما في الشكل المقابل )**

$(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة بحدّها الاول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) أنقل الشكل المقابل، مثّل دون حساب على محور الفواصل الحدود $U_0$ ، $U_1$ ، $U_2$ و $U_3$ مبرزا خطوط الإنشاء.

2) خمّن اتجاه تغيّر المتتالية $(U_n)$ وتقاربها.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_n > 1$.

4) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(U_n)$ ، ماذا تستنتج؟.

5) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$.

6) $(V_n)$ متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية $(V_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدهّا الأوّل.

ب) أكتب عبارة $U_n$ بدلالة $n$.

ج) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ بحيث: $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \cdots\cdots + \frac{V_n - 1}{U_n}$.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

**من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدّه مع التعليل:**

1) منحنى الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = 3x + \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

أ) $y = 3x$ ب) $y = 3x + 1$ ج) $y = 3x + 2$

2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \displaystyle\int_1^{\lambda} x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$ ، علما أن الدالة: $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\left[\ln x - \dfrac{1}{2}\right]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x \ln x$ ، قيمة $\lambda$ التي من أجلها $A(\lambda) = \dfrac{1}{4}$ هي:

أ) $\lambda = e^{-1}$ ب) $\lambda = \sqrt{e}$ ج) $\lambda = 2e$

3) المعادلة: $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما:

أ) $S = \{1; -5\}$ ب) $S = \{1; 5\}$ ج) $S = \{-1; -5\}$

4) المتتالية العددية $(U_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 2 - 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) ليست رتيبة

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

وحدة إنتاجية يسيرها 20 عامل منهم 8 نساء و 12 رجال ، من بينهم العامل " مراد ".

1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال. ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية:

$A$: " أعضاء اللجنة نساء". $B$: " اللجنة تضم على الأكثر إمرأة ". $C$: "اللجنة تضم على الأقل إمرأة ".

2) نعتبر المتغيّر العشوائي $X$ الذي يرفق بكل لجنة مشكلة ، عدد الرجال الموجودين فيها.

أ) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي $X$ ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P(X^2 - 2X \leqslant 0)$.

3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس، نائب و كاتب ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية :

$D$: "رئيس اللجنة من الرجال ". $E$: " رئيس ونائب اللجنة من نفس الجنس ".

$F$: "العامل " مراد " موجود في اللجنة ".

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

$I$. نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) أحسب نهايتي الدالة $g$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0.74; -0.73[$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

$II$. $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل المنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ : $f(\alpha) = \alpha + 1 + \dfrac{2}{2\alpha+1}$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$. ( تدور النتائج إلى $10^{-2}$ ).

5) بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف $\omega$ يطلب تعيين إحداثييها.

6) أنشئ كلاّ من $(\Delta)$ و $(C_f)$. (يعطى $f(-1.65) \approx 0$ و $f(1.4) \approx 0$ ).

7) أ) عيّن العددين $a$ و $b$ حتّى تكون الدالة $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$.

ب) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$ (حيث $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما).

جـ) أحسب: $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

**إنتهى الموضوع الثّاني**

## الإجابة النموذجية عن 6 أسئلة البكالوريا التجريبية

### الموضوع الأول

### التمرين الأول

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التحليل:

1/ الدالة f المعرفة على IR ب: $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}$ هي دالة

الجواب: / فردية

التحليل:

لدينا $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

* لدينا f متناظرة بالنسبة لـ "O"

أي من أجل $x\in R$ فإن $-x\in R$

*

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{(e^x-1)}{e^x+1}$$

$$=-f(x)$$

ومنه f دالة فردية

2/ حل المعادلة التفاضلية $y'-\ln3\,y-\ln27=0$ والتي تحقق $y(0)=6$ هي

الجواب: / $y(x)=3^{x+2}-3$

التحليل:

لدينا $y'-\ln3\,y=\ln27$

$$y'=(\ln3)y+\ln27$$

هي من الشكل $y'=ay+b$

حلولها من الشكل

$$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$$

إذا $y(x)=Ce^{(\ln3)x}-\frac{\ln27}{\ln3}$

$$=Ce^{\ln3^x}-\frac{3\ln3}{\ln3}$$

$$\boxed{y(x)=C\times3^x-3} \quad (1)$$

لدينا $y(0)=6$ أي

$$C\times3^0-3=6$$

$$C=6+3=9$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$y(x)=9\times3^x-3$$

$$=3^2\times3^x-3$$

$$\boxed{y(x)=3^{x+2}-3}$$

3/ A, B حدثان مستقلان

$P(A\cup B)=0,35$ , $P(A)=0,2$

احتمال الحادثة B هو

الجواب: / ب $P(B)=0,1875$

التحليل:

لدينا A, B مستقلان

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

ولدينا $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cap B)-P(A)=P(B)(1-P(A))$$

$$P(B)=\frac{P(A\cap B)-P(A)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{0,35-0,2}{1-0,2}=\boxed{0,1875}$$

4/ $(U_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)$ ، المجموع $S_n$ حيث

$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$

الجواب: ج/ $S_n=1443$

التحليل:

نحسب

$$U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx$$

$$=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$=\left[2\ln x+(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$=2\ln e^{n+1}+(\ln(e^{n+1}))^2$$

$$-2\ln e^n-(\ln e^n)^2$$

$$=2(n+1)+(n+1)^2-2n-n^2$$

$$=\cancel{2n}+2+\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{2n}-\cancel{n^2}$$

$$=2n+3$$

وهي متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول 3

$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$

$$S_n=\frac{(n-p+1)}{2}(U_p+U_n)\quad \begin{cases}p=0\\ n=36\end{cases}$$

$$=\frac{(36-0+1)}{2}(U_0+U_{36})$$

$$=\frac{37}{2}(3+75)=\frac{37\times 78}{2}$$

$$=1443$$

## التمرين الثاني:

I. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

1/ دراسة تغيرات $f$ وتشكيل جدول تغيراتها.

* النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

* اتجاه تغير $f$:

$f$ دالة ق. إ على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-2x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$=\frac{\frac{2(x^2+1)-2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

لأن $x^2+1>0$ و $\sqrt{x^2+1}>0$

ومنه $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2/ حل المعادلة $f(x)-x=0$

$$f(x)-x=0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-x=0$$

$$\frac{2x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

وبالتالي

$$2x-x\sqrt{x^2+1}=0$$

$$x(2-\sqrt{x^2+1})=0$$

اما $x=0$ او $2-\sqrt{x^2+1}=0$

$$2-\sqrt{x^2+1}=0$$

$$\sqrt{x^2+1}=2$$

$$x^2+1=4$$

$$x^2=3$$

$x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة

$$S=\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

3/ بيان انه من اجل $x\in[1, \sqrt{3}]$

فان $f(x)\in[1, \sqrt{3}]$

لدينا $x\in[1, \sqrt{3}]$

اي $1\leq x\leq\sqrt{3}$

وبما ان $f$ دالة متزايدة على المجال $[1, \sqrt{3}]$ فان

$$f(1)\leq f(x)\leq f(\sqrt{3})$$

$$1\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\leq f(x)\leq\sqrt{3}$$

اي $1\leq f(x)\leq\sqrt{3}$

ومنه $f(x)\in[1, \sqrt{3}]$

II $U_0=1$ ، $U_{n+1}=f(U_n)$

1/ أ/ بيان انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$$1\leq U_n\leq\sqrt{3}$$

نفرض $P(n): 1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

$P(0): 1\leq U_0=1\leq\sqrt{3}$ (محققة)

نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

لدينا $1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

وبما ان $f$ دالة متزايدة على المجال $[1, \sqrt{3}]$ فان

$$f(1)\leq f(U_n)\leq f(\sqrt{3})$$

$$1\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\leq U_{n+1}\leq\sqrt{3}$$

اي $1\leq U_{n+1}\leq\sqrt{3}$

ومنه من اجل كل عدد طبيعي $n$:

$$1\leq U_n\leq\sqrt{3}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير $(U_n)$

واستنتاج تقاربها وحساب نهاية $(U_n)$

$$U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n$$

$$=\frac{2U_n-U_n\sqrt{U_n^2+1}}{\sqrt{U_n+1}}$$

$$=\frac{U_n(2-\sqrt{U_n^2+1})}{\sqrt{U_n^2+1}}$$

! شارة الفرق من إشارة

$2-\sqrt{U_n^2+1}$ لأن $\sqrt{U_n^2+1}>0$

و $1 \le U_n \le \sqrt{3}$

لدينا $1 \le U_n \le \sqrt{3}$

$1 \le U_n^2 \le 3$

$2 \le U_n^2+1 \le 4$

$\sqrt{2} \le \sqrt{U_n^2+1} \le 2$

بضرب الطرفين بالعدد $(-1)$ نجد

$-2 \le -\sqrt{U_n^2+1} \le -\sqrt{2}$

$0 \le 2-\sqrt{U_n^2+1} \le 2-\sqrt{2}$

ومنه $2-\sqrt{U_n^2+1} \geq 0$

ومنه $(U_n)$ متزايدة تماما

ملاحظة

يمكن استخدام جدول إشارة $2-\sqrt{x^2+1}$

* الاستنتاج:

$(U_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $(U_n \le \sqrt{3})$ فهي متقاربة

* حساب نهاية $(U_n)$

لدينا $(U_n)$ متقاربة وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

$f(l) = l$

$f(l) - l = 0$

قمنا بحل المعادلة سابقا

وحلولها هي

$S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$l=0$ مرفوض لأن $1 \le U_n \le \sqrt{3}$

$l=-\sqrt{3}$ مرفوض لأن $1 \le U_n \le \sqrt{3}$

$l=\sqrt{3}$ مقبول

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{3}$$

/2 $$V_n = \frac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$$

أ/ بيان أن $(V_n)$ م هندسية بطلب

$q=?$ و $V_0=?$

$$V_{n+1} = \frac{(U_{n+1})^2}{3-(U_{n+1})^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}{3-\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{4U_n^2}{\cancel{U_n^2+1}}}{\frac{3U_n^2+3-4U_n^2}{\cancel{U_n^2+1}}}$$

$$= \frac{4U_n^2}{-U_n^2+3} = 4\left(\frac{U_n^2}{3-U_n^2}\right)$$

$$= 4V_n$$

ومنه $(V_n)$ م هندسية أساسها

$q = 4$

وحدها الأول

$$V_0 = \frac{(U_0)^2}{3-(U_0)^2} = \frac{1}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ب/ كتابة $V_n$ بدلالة n واستنتاج $U_n$ بدلالة n وحساب نهاية $(U_n)$

* لدينا $(V_n)$ م هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \quad \left| \begin{array}{l} p=0 \\ q=4 \\ n=n \end{array}\right.$$

$$= V_0 \times 4^{n-0}$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2}(4)^n}$$

* كتابة $U_n$ بدلالة n

لدينا $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$

$$V_n(3-U_n^2) = U_n^2$$

$$3V_n - U_n^2 V_n - U_n^2 = 0$$

$$U_n^2(-V_n-1) = -3V_n$$

$$U_n^2 = \frac{-3V_n}{-V_n-1}$$

$$U_n^2 = \frac{3V_n}{V_n+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n = -\sqrt{\dfrac{3V_n}{V_n+1}} \quad \text{(مرفوضة لأن } 1 \le U_n \le \sqrt{3}) \\ U_n = \sqrt{\dfrac{3V_n}{V_n+1}} \end{array} \right.$$

ومنه

$$U_n = \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})\times 4^n}{(\frac{1}{2})\times 4^n + 1}}$$

* حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})4^n}{\frac{1}{2}\times 4^n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\times \cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4^n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3/2}{1/2}} = \sqrt{3}$$

3/ حساب بدلالة n المجموع

$$S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \cdots + \frac{1}{V_n}$$

لدينا $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ م هندسية أساسها $q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$\frac{1}{V_0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_n = \frac{1/V_0}{1-q'}\left(1-(q')^{n-0+1}\right)$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\frac{3}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

$$S'_n = \frac{1}{(U_0)^2} + \frac{1}{(U_1)^2} + \dots + \frac{1}{(U_n)^2}$$

لدينا $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

أي $\frac{1}{V_n} = \frac{3 - U_n^2}{U_n^2}$

$$\frac{1}{V_n} = \frac{3}{U_n^2} - 1$$

$$\frac{1}{V_n} + 1 = \frac{3}{U_n^2}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_n}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{U_n^2}$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}\right) + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}}_{(n+1)\ \text{مرة}}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{8}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

## التمرين الثالث :

② ② ① ⓪

② ② ④ ⓪

التجربة : سحب 3 كريات

الكيفية : في آن واحد

طريقة العد : توفيقة $C_8^3 = 56$

"A" الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6

"B" " " جداء أرقامها يساوي 8

1/ حساب $P(A)$ و $P(B)$

3 كريات ② أو ⓪ و ② و ④

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4 + 8}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

3 كريات ② أو ① ② ④

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4 + 4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

2/ حساب $P(A \cap B)$ وهل الحدثان A و B مستقلان

$A \cap B$ الكريات المسحوبة جداء أرقامها 8 ومجموعها 6

توجد حالة واحدة وهي 3 كريات ②

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$= 0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{\ln y^2}{y}\right)^2$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{2\ln y}{y}\right)^2 = 0$$

ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ $(C_f)$

2/ أ/ بيان أنه من أجل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f'(x) = \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

$f$ دالة ق ا على $]0,+\infty[$

ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)x - (1+\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)\left[2-(1+\ln x)\right]}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)(2-1-\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$$

| $X$ | $-\infty$ | $-4$ | | $0$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $X^2-16$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{X^2-16}{X}$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |

حلول المتراجحة $\frac{X^2-16}{X} > 0$ هي

$-4 < X < 0$ أو $X > 4$

$$P\left(\frac{X^2-16}{X}\right) = P(X>4)$$

$$= P(X=8) + P(X=16)$$

$$= \frac{8}{16} + \frac{6}{16} = \frac{14}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

## التمرين الرابع:

$$f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$D_f = ]0+\infty[$

1/ حساب $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ وبيان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ وتفسير النتائج

$$* \lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} (1+\ln x)^2 = +\infty$ ،

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ $(C_f)$

ب/ إستنتاج اتجاه تغير f و تشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x) = \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+\ln x)(1-\ln x)$ لأن $x^2 > 0$

$1+\ln x = 0$
$\ln x = -1$
$\boxed{x = e^{-1}}$

$1-\ln x = 0$
$-\ln x = -1$
$\ln x = 1$
$\boxed{x = e}$

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1+\ln x$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $1-\ln x$ | ‖ | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]e^{-1}, e[$ ومتناقصة على المجالين $]-\infty, e^{-1}[$ و $]e, +\infty[$

* جدول التغيرات f :

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{2}{e}$ | ↘ | $0$ |

$f(e) = \frac{2}{e}$

$f(e^{-1}) = 0$

ج/ كتابة معادلة المماس (T) لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة "1"

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = 1$ / $f(1) = 1$

$y = 1(x-1) + 1$

$y = x - 1 + 1$

$\boxed{(T): y = x}$

/3 $g(x) = 1 - x + \ln x$

$D_g = ]1, +\infty[$

*1/ دراسة اتجاه تغير g واستنتاج إشارة $g(x)$ في $]1, +\infty[$

لدينا g قابلة على $]1, +\infty[$ ودالتها المشتقة $g'$

$g'(x) = -1 + \frac{1}{x}$

$= \frac{-x+1}{x} < 0$

لأن $x > 1$ و $x > 1$

$-x + 1 < 0$

ومنه g متناقصة على $]1, +\infty[$

إستنتاج إشارة $g(x)$

لدينا $g(1) = 0$ و g دالة متناقصة على $]1, +\infty[$ وبالتالي $g(x) < 0$

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | $-$ | |

ب/ تبرير أنه من أجل $x\in]1,+\infty[$ فإن: $1+x+\ln x>0$

لدينا $x>1$

$\ln x>0$ ---- (1)

$x>1$

$x+1>2>0$ ---- (2)

بجمع (1)، (2) طرفا لطرف نجد

$$\boxed{x+1+\ln x>0}$$

ج/ استنتاج وضعية $(C_g)$ بالنسبة للمستقيم (T)

$$f(x)-y=\frac{(1+\ln x)^2}{x}-x$$

$$=\frac{(1+\ln x)^2-x^2}{x}$$

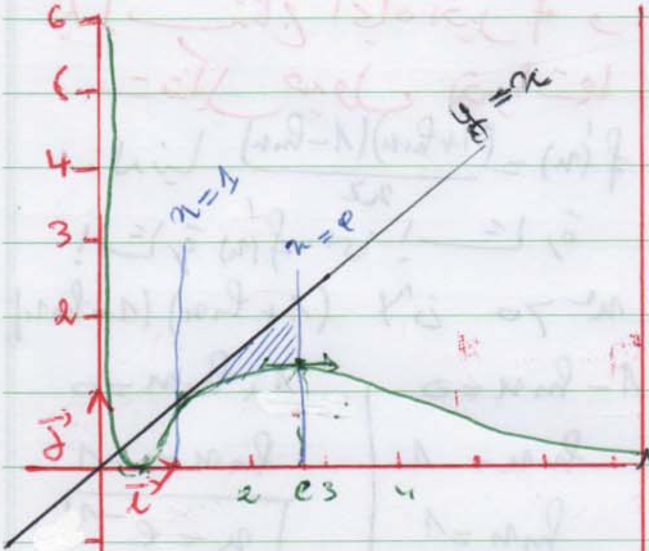
$$=\frac{(1-x+\ln x)(1+x+\ln x)}{x}$$

$$=\frac{g(x)(1+x+\ln x)}{x}<0$$

لأن $1+x+\ln x>0$ و $g(x)\leq 0$ و $x>0$

ومنه

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)-x$ | $0$ | $-$ |
| الوضع | $(C_g)$ $(T)$ | $(C_g)$ تحت $(T)$ |




5/ المناقشة البيانية حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $\ln x=\sqrt{m}x-1$

لدينا $\ln x=\sqrt{m}x-1$

$\ln x+1=\sqrt{m}x$

$(\ln x+1)^2=mx^2$

$\frac{(\ln x+1)^2}{x}=mx$

$f(x)=mx$

المناقشة تؤول إلى ايجاد فواصل نقط تقاطع $(C_g)$ مع المستقيم الدوار ذو المعادلة $y=mx$

لدينا $y=mx$ يشمل نقطة ثابتة وهي $O(0,0)$

| قيم $m$ | المناقشة |
|---|---|
| $m=0$ | حل مضاعف |
| $0<m<1$ | ثلاث حلول متمايزة |
| $m=1$ | حلان أحدهما مضاعف |
| $m>1$ | حل وحيد |

6/ حساب مساحة الحيز المحدد بـ $(C_g)$ و المستقيمات

$x=e$ , $x=1$ , $y=x$

$$A=\int_1^e y-f(x)\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x-(\ln x)^2-\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e$$

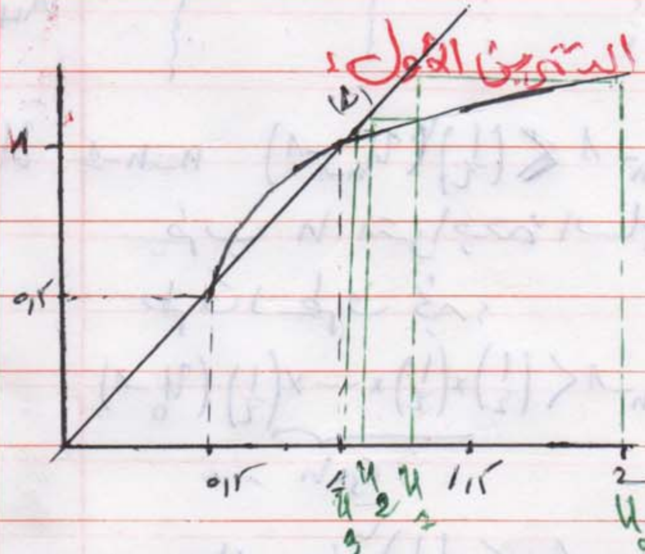
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-1-1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-0-0-0\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{2}\ u.a$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{17}{6}\ u.a$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول:




1/ تمثيل الحدود $u_0 , u_1 , u_2 , u_3$

2/ تخمين اتجاه تغير $(u_n)$ وتقاربها

لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ مرتبة ترتيبا تنازليا ومنه $(u_n)$ متناقصة

ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع $(C_f)$ مع $(D)$ أي $x=1$

3/ برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n$ طبيعي: $u_n > 1$

نضع $P(n): u_n > 1$

$P(0): u_0 = 2 > 1$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

$u_n > 1$

وبما أن $f$ متزايدة في المجال $]1;+\infty[$

$f(u_n) > f(1)$

$u_{n+1} > 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n > 1$

4/ دراسة اتجاه تغير $(u_n)$ والاستنتاج

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n$$

$$= \frac{3u_n - 1 - 2u_n^2}{u_n}$$

$$= \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n}$$

إشارة الفرق من إشارة $-2u_n^2+3u_n-1$

نضع $x = u_n$

$-2x^2 + 3x - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$ | $a=-2$, $b=3$, $c=-1$

$= 3^2 - 4(-2)(-1)$

$= 1$

$$x_1 = \frac{-3+1}{-2(2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{-2(2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+3x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

وبما أن $u_n > 1$ فإن $-2u_n^2+3u_n-1 < 0$ ومنه $(u_n)$ متناقصة في $\mathbb{N}$

* الاستنتاج: $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n > 1)$ فهي متقاربة

5/ أ) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1}-1 < \frac{1}{2}(U_n-1)$

لدينا

$$U_{n+1}-1 = \frac{3U_n-1}{2U_n} - 1$$

$$= \frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}$$

$$= \frac{U_n-1}{2U_n}$$

$$= \frac{1}{2U_n}(U_n-1)$$

ولدينا $U_n > 1$

أي $2U_n > 2$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2U_n} < \frac{1}{2}}$ ...(1)

لدينا $U_n-1>0$ بضرب طرفي (1) بالعدد $(U_n-1)$ نجد

$$\frac{1}{2U_n}(U_n-1) < \frac{1}{2}(U_n-1)$$

$$\boxed{U_{n+1}-1 < \frac{1}{2}(U_n-1)}$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من العلاقة السابقة ، من أجل

$U_1-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_0-1)$ $n=0$

$U_2-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_1-1)$ $n=1$

$U_3-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_2-1)$ $n=2$

$\vdots$

$U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_{n-1}-1)$ $n=n-1$

بضرب $n$ متراجحة السابقة طرف لطرف نجد

$$U_n-1 < \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\dots\times\left(\frac{1}{2}\right)}_{n\ \text{مرة}}(U_0-1)$$

$$U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n(2-1)$$

$$\boxed{U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ملاحظة

يمكن برهان بتراجع ع العلاقة $U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

6/ $V_n = \frac{U_n-1}{2U_n-1}$

أ) بيان أن $(V_n)$ م هندسية

$V_0 = ?$ ، $q = ?$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}$$

$$= \frac{\frac{3U_n-1}{2U_n}-1}{2\left(\frac{3U_n-1}{2U_n}\right)-1}$$

ص 2

$$= \frac{\frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}}{\frac{6U_n-2-2U_n}{2U_n}}$$

$$= \frac{U_n-1}{4U_n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}V_n$$

ومنه $(V_n)$ م هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{U_0-1}{2U_0-1} = \frac{2-1}{2(2)-1} = \frac{1}{3}$$

ب/ كتابة $U_n$ بدلالة $n$

* كتابة $V_n$ بدلالة $n$

$(V_n)$ م هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \quad \begin{cases} p=0 \\ q=\frac{1}{2} \\ n=n \end{cases}$$

$$= V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

* لدينا $V_n = \frac{U_n-1}{2U_n-1}$

$$V_n(2U_n-1) = U_n-1$$

$$2V_nU_n - V_n = U_n - 1$$

$$2V_nU_n - U_n = V_n - 1$$

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$U_n = \frac{V_n-1}{2V_n-1}$$

$$\boxed{U_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}}$$

جـ/ حساب المجموع $S_n$

$$S_n = \frac{V_0-1}{U_0} + \frac{V_1-1}{U_1} + \dots + \frac{V_n-1}{U_n}$$

لدينا مما سبق

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$\boxed{2V_n-1 = \frac{V_n-1}{U_n}}$$

$$S_n = (2V_0-1)+(2V_1-1)+\dots+(2V_n-1)$$

$$= 2\underbrace{(V_0+V_1+\dots+V_n)}_{q=\frac{1}{2}\text{ م ه}} - \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{(n+1)\text{ مرة}}$$

$$= 2\frac{V_0}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - (n+1)$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1}$$

## التمرين الثاني :

اختبار الإجابة الصحيحة مع التبرير

1/ منحنى الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}+3x$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$ معادلته

الجواب : جـ/ $y=3x+2$

التحليل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-3x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x+\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}-3x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}=2$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(3x+2)=0$$

ومنه $y=3x+2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$

2/ $A(\lambda)=\int_1^\lambda x\ln x\,dx$ , $\lambda>1$

قيمة $\lambda$ حتى يكون $A(\lambda)=\frac{1}{4}$ هي

الجواب : ب/ $\lambda=\sqrt{e}$

التحليل :

$$A(\lambda)=\int_1^\lambda x\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^\lambda$$

$$=\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

حتى يكون $A(\lambda)=\frac{1}{4}$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\cancel{\frac{1}{4}}=\cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\frac{\lambda^2}{2}=0$

$\lambda^2=0$

$\lambda=0$

مستحيل لأن

$\lambda>1$

$\ln\lambda-\frac{1}{2}=0$

$\ln\lambda=\frac{1}{2}$

$\boxed{\lambda=e^{\frac{1}{2}}}$

ومنه $\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$

3/ المعادلة $\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$ تقبل حلان هما :

الجواب : ب/ $S=\{1.5\}$

التحليل :

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

هي معرفة على $\mathbb{R}^*$ لأن

$$11x^2-6x+5>0\ ,\ x^2>0$$

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

$$\frac{\ln(11x^2-6x+5)}{\ln 10}=\frac{\ln x^2}{\ln 10}+1$$

$$\ln(11x^2-6x+5)=\ln x^2+\ln 10$$
$$\ln(11x^2-6x+5)=\ln 10x^2$$
$$11x^2-6x+5=10x^2$$
$$x^2-6x+5=0$$

$\Delta=b^2-4ac$ | $a=1$, $b=-6$, $c=5$

$=36-4(1)(5)$

$=16$

$$x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5$$
$$x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ومنه $S=\{1,5\}$

/4 $(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من متالية :

الجواب ؟ / متزايدة تماما

التحليل :

$$u_{n+1}-u_n=\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$
$$=-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(-\frac{1}{4}+1\right)$$
$$=3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n>0$$

ومنه $(u_n)$ متزايدة تماما

## التمرين الثالث :

عدد الرجال : 12
عدد النساء : 08

عدد العمال : $20=12+8$

التجربة تشكيل لجنة من 03 عمال

المهام غير مذكورة

طريقة العد : توفيقة $C_{20}^3=1140$

1/ حساب احتمال الحوادث التالية

"A" أعضاء اللجنة نساء

$$P(A)=\frac{C_8^3}{C_{20}^3}=\frac{14}{285}$$

"B" اللجنة تضم امرأة على الأكثر

$$P(B)=\frac{C_8^1\times C_{12}^2+C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{187}{285}$$

"C" اللجنة تضم امرأة على الأقل

$$P(C)=\frac{C_8^1\times C_{12}^2+C_8^2\times C_{12}^1+C_8^3}{C_{20}^3}$$
$$=\frac{72}{95}$$

/2 ليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل لجنة عدد الرجال المتواجدين في اللجنة

2/ قانون الاحتمال وحساب الأمل الرياضياتي.

قيم $X$ هي

$$X=\{0,1,2,3\}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{14}{285}$ | $\frac{84}{285}$ | $\frac{132}{285}$ | $\frac{55}{285}$ | 1 |
| $x_iP_i$ | 0 | $\frac{84}{285}$ | $\frac{264}{285}$ | $\frac{165}{285}$ | |

$$P(X=0)=\frac{C^3_8}{C^3_{20}}=\frac{14}{285}$$

$$P(X=1)=\frac{C^1_{12}\times C^2_8}{C^3_{20}}=\frac{28}{95}=\frac{84}{285}$$

$$P(X=2)=\frac{C^2_{12}\times C^1_8}{C^3_{20}}=\frac{44}{95}=\frac{132}{285}$$

$$P(X=3)=\frac{C^3_{12}}{C^3_{20}}=\frac{11}{57}=\frac{55}{285}$$

$$E(X)=\sum x_ip_i=\frac{9}{5}$$

/3

التجربة: 03 عمال

المهام: رئيس، نائب، كاتب

طريقة الاختيار ترتيبة $A^3_{20}=6840$

حساب احتمال الحوادث التالية

"D" رئيس اللجنة من الرجال

$$P(D)=\frac{A^1_{12}\times A^2_{19}}{A^3_{20}}=\frac{3}{5}$$

"E" رئيس اللجنة ونائبه من نفس الجنس

$$P(F)=\frac{A^2_{12}\times A^1_{18}+A^2_8\times A^1_{18}}{A^3_{20}}$$

$$=\frac{3384}{6840}=\frac{47}{95}$$

"F" العامل "مراد" في اللجنة

$$P(F)=\frac{3\times A^1_1\times A^2_{19}}{A^3_{20}}=\frac{1026}{6840}=\frac{3}{20}$$

## التمرين الرابع:

I $g(x)=(2x+1)e^{-x}+1 \quad D_g=\mathbb{R}$

1/ حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

• $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-x}+1=-\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1)e^{-x}+1$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}+1$$

$$=1$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

2/ دراسة اتجاه تغير g وتشكيل جدول تغيراتها

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$g'(x)=2e^{-x}-e^{-x}(2x+1)$$

$$=e^{-x}(2-(2x+1))$$

$$=e^{-x}(1-2x)$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $1-2x$ لأن $e^{-x}>0$

$1-2x=0$ أي $2x=1$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

ومنه $g$ متناقصة تماما على $[\frac{1}{2};+\infty[$ ومتزايدة تماما على $]-\infty;\frac{1}{2}]$

* جدول تغيرات $g$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↗ | $\frac{2}{\sqrt{e}}+1$ | ↘ | $0$ |

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}+1=\frac{2}{\sqrt{e}}+1$$

3/II/ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ حيث $-0,74<\alpha<-0,73$

لدينا $g$ دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0,74;-0,73[$

$g(-0,74)=$ ,

$g(-0,73)=$

أي $g(-0,74)\times g(-0,73)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد $\alpha$ وحيد حيث $-0,74<\alpha<-0,73$ يحقق $g(\alpha)=0$

ب/ إستنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة $g$ ومن $g(\alpha)=0$ ينتج

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

## II

$$f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$$

1// حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{-2x-3}{x}e^{-x}+1\right]$$

$-2$

$$=+\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^{x}}-\frac{3}{e^{x}}+x$$

$$=+\infty$$

2/أ/ تبيان أن $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_g)$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}+x-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^x}-\frac{3}{e^x}=0$$

ومنه $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_g)$ بجوار $(+\infty)$

ب/ دراسة وضعية $(C_g)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$:

$$f(x)-y=(-2x-3)e^{-x}$$

إشارة الفرق من إشارة $(-2x-3)$

لأن $e^{-x}>0$

$-2x-3=0$ أي $-2x=3$

$x=\frac{-3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $-3/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x-3$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)-y$ | $+$ | 0 | $-$ |
| الوضعية | $(C_g)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_g)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_g)$ تحت $(\Delta)$ |

3/ أ/ تبيان أن $f'(x)=g(x)$

لدينا $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=-2e^{-x}-e^{-x}(-2x-3)+1$$

$$=e^{-x}[-2-(-2x-3)]+1$$

$$=(2x+1)e^{-x}+1$$

$$=g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير $f$ وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x)=g(x)$

إذا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

ومنه $f$ متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

ومتناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$

* جدول التغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |

4/ تبيان أن $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{2\alpha+1}$

نثبت أن

$$f(\alpha)-(\alpha+1)-\frac{2}{2\alpha+1}=0$$

$f(\alpha) - \alpha - 1 - \frac{2}{2\alpha+1} =$

$= (-2\alpha-3)e^{-\alpha} + \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} - 1 - \frac{2}{2\alpha+1}$

$= (-2\alpha-3)e^{-\alpha} - \frac{(2\alpha+1)+2}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)(2\alpha+1)e^{-\alpha} - (2\alpha+3)}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)\left[(2\alpha+1)e^{-\alpha}+1\right]}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)\,g(\alpha)}{2\alpha+1} = 0$

حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$-0,74 < \alpha < -0,73$

$\boxed{0,26 < \alpha+1 < 0,27}$ — (1)

$-1,48 < 2\alpha < -1,46$

$-0,48 < 2\alpha+1 < -0,46$

$-2,08 > \frac{1}{2\alpha+1} > -2,17$

$-4,16 > \frac{2}{2\alpha+1} > -4,34$

$\boxed{-4,34 < \frac{2}{2\alpha+1} < -4,16}$ — (2)

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد

$-4,08 < f(\alpha) < -3,89$

5/ تبيان أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

لدينا $f'$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$f''(x) = g'(x)$

من الجزء I

| $x$ | $-\infty$ | $1/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)=g'(x)$ | + | 0 | − |

ومنه $f''$ تنعدم عند $x=\frac{1}{2}$ مغيرة إشارتها ومنه $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف هي

$\omega\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-1-3)e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\sqrt{e}}$

6/ إنشاء $(C_f)$ و $(\Delta)$ (آخر الموضوع)

7/ تعيين $a$ و $b$ حتى تكون $H$ دالة أصلية لـ $h$

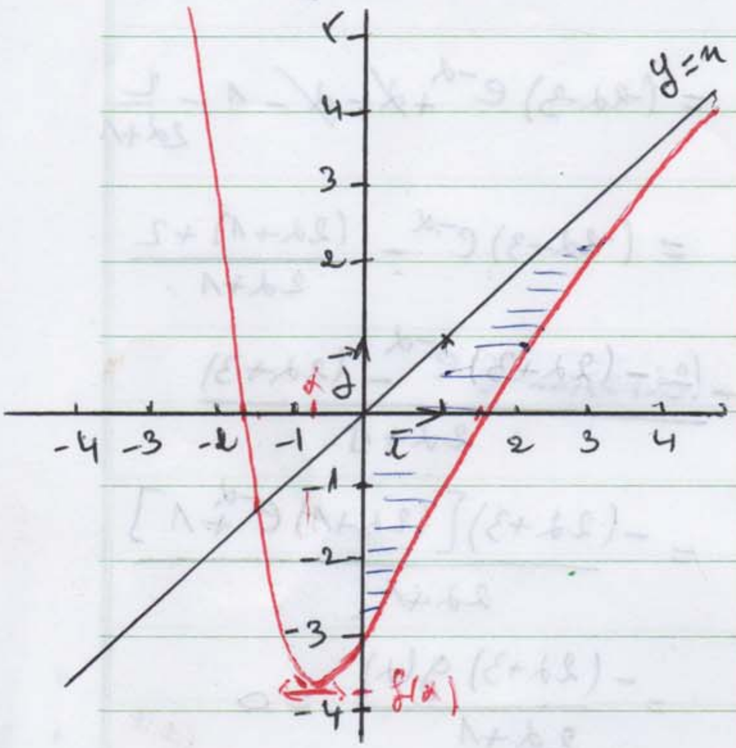
$H(x) = (ax+b)e^{-x}$

$h(x) = (-2x-3)e^{-x}$

$H'(x) = h(x)$

$H'(x) = a e^{-x} - (ax+b)e^{-x}$

$= (-ax-b+a)e^{-x}$




بالمطابقة مع الدالة h نجد

$-a=-2 \Rightarrow a=2$

$-b+a=-3 \qquad b=3+a=5$

$H(x)=(2x+5)e^{-x}$

7 / ب/ حساب المساحة $A(\lambda)$

المحدد بـ: $(C_f)$ والمستقيمات

$y=x \;,\; x=\lambda \;,\; x=0$

$A(\lambda)=\int_0^\lambda y-f(x)\,dx$

$=\int_0^\lambda \cancel{x}-(2x-3)e^{-x}-\cancel{x}\,dx$

$=\left[-H(x)\right]_0^\lambda$

$=-H(\lambda)+H(0)$

$=-(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5 \text{ u.a}$

حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty} -(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5$

$=\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{-2\lambda}{e^\lambda}-\frac{5}{e^\lambda}+5$

$=5$

ح 03 السؤال ②

ب/ $P(X^2-2X\leq 0)$

$X^2-2X=0$

$X(X-2)=0$

$X-2=0 \quad | \quad X=0$

$X=2$

| $X$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X^2-2X$ | + | 0 | − | 0 | + |

قيم $X$ هي $0\leq X\leq 2$

$P(X^2-2X\leq 0)=P(0\leq X\leq 2)$

$=P(X=0)+P(X=1)$

$+P(X=1)$

$=\frac{230}{285}$